2 Rentenrechnung

Man zahlt eine feste Rente (= Rate) auf ein Konto ein oder man hebt diese von einem Konto ab und interessiert sich für den Kontostand nach einer bestimmten Anzahl von Jahren.

Für die Rentenrechnung unterscheidet man folgende Kriterien:

- nach der Fälligkeit der Rentenzahlungen
  - bei vorschüssigen Zahlungen wird am Anfang einer jeden Periode auf ein Konto eingezahlt
  - bei nachschüssigen hingegen erfolgt die Zahlung erst am Ende
- nach der Länge des Rentenvorgangs
  - bei einer endlichen Rente ist die Zeitspanne begrenzt und bekannt
  - eine ewige Rente hingegen beschreibt den Fall, dass man eine bestimmte Rate ohne zeitliche Begrenzung, d.h. ewig, erhält
- nach der Länge der Periode, nach deren Ablauf sich die Rentenzahlung wiederholt
  - eine jährliche Rente wird einmal pro Jahr bezahlt
  - eine unterjährige Rente hingegen steht mehrmals pro Jahr an (so z.B. halbjährlich, quartalsweise etc.)
- nach der Richtung der Zahlung
  - zum einen kann sie von einem abgehoben werden
  - zum anderen kann die Rente auf ein Konto eingezahlt werden
- nach der Länge der Zinsperiode
  - jährlich oder
  - unterjährlich können die eingezahlten Raten verzinst werden
- nach dem Zusammenhang zwischen Zins- und Rentenperiode
  - bei übereinstimmenden Perioden handelt es sich z.B. um jährliche Renten bei einer jährlichen Verzinsung
  - bei nicht übereinstimmenden Perioden wird z.B. eine quartalsweise Rente bezahlt, die Verzinsung des eingesetzten Kapitals erfolgt aber lediglich jährlich
- nach der Art der Verzinsung
  - einfach oder
  - zinseszinslich
- nach der Fälligkeit der Zinszahlung
  - vorschüssige oder
  - nachschüssige Verzinsung

Es ergeben sich offensichtlich sehr viele unterschiedliche Konstellationen, von denen wir aber nicht alle ansprechen werden. Das Augenmerk liegt auf den ersten vier Unterscheidungskriterien.

> **Beispiel 21:**
>
> Kalle zahlt jedes Jahr 1.000 € auf sein Konto. Der Kontostand wird jeweils mit 5 % verzinst. Wie lautet sein Kontostand nach drei Jahren?

Man muss beachten, dass die jeweils wiederkehrende Zahlung (auch Rente genannt) *verzinst* wird, darüber hinaus aber auch Zinseszinsen anfallen. Entscheidend ist außerdem, ob

- am Anfang eines Jahres die Rente eingezahlt wird
  - ◊ (vorschüssige Rentenformel nehmen!) oder
- am Ende eines Jahres
  - ◊ (nachschüssige Rentenformel nehmen!).

2.1 Jährliche Rentenzahlungen

2.1.1 Nachschüssige Rentenzahlungen

Das Kapital nach *n* Perioden, unmittelbar nach Eingang der *n.* Zahlung, wenn die erste Zahlung am Ende (also nachschüssig!) der ersten Periode erfolgt, lautet

$K_n = K_0 * q^n \pm R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (nachschüssiger) Rentenendwert.

MERKE:

- Der Ausdruck $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ = REWF(n;i) heißt nachschüssiger *Rentenendwertfaktor*. Er gibt an, wie hoch der Vermögensstand ist, wenn eine Rente von 1 € den Zeitraum von n Jahren lang auf ein Konto nachschüssig eingezahlt wird. Wir nennen ihn REWF(n;i), er ist am Ende des Buches tabelliert.
- In der obigen Formel ist speziell $R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ = R·REWF(n;i) der Rentenendwert der nachschüssig gezahlten Rente R.

Beispiel 22:

Die Zahlung im Beispiel des Kalle möge am Ende eines jeden Jahres erfolgen.

Wie lautet der Rentenendwert?

Man erhält $K_3 = 0 \cdot 1{,}05^3 + 1.000 \cdot \frac{1{,}05^3 - 1}{1{,}05 - 1} = 3.152{,}50$.

Dass diese Rechnung richtig ist, sieht man auch an folgender Tabelle:

Zeit	31.12.2001	31.12.2002	31.12.2003
Entwicklung der ersten Rate	1.000	1.050	1.102,50
Entwicklung der zweiten Rate		1.000	1.050
Entwicklung der dritten Rate			1.000
Rentenendwert			3.152,50

Tab. 2: Rentenendwert und Herleitung aus Verzinsung nachschüssiger Rentenzahlungen

Die Zahlung am Ende des ersten Jahres wird noch zwei Jahre verzinst, liefert also $1.000 \cdot 1{,}05^2 = 1.102{,}50$, die Zahlung am Ende des zweiten Jahres liegt nur noch ein Jahr auf dem Konto und wird zu $1.000 \cdot 1{,}05 = 1.050$, die Einzahlung am Ende des letzten Jahres wird gar nicht mehr aufgezinst. Insgesamt erhält man also R_3 = 1.102,50 + 1.050 + 1.000 = 3.152,50 nach drei Jahren.

Zum Vorzeichen von R:

- „+" wird gewählt, wenn die Rentenzahlungen auf ein Konto *eingezahlt* werden,
- „-" entsprechend, wenn die Renten *abgehoben* werden.

Man kann sich außerdem die Frage stellen, wie viel der Rentenendwert R_n am Anfang der Laufzeit, also im Zeitpunkt t = 0, wert ist, dann ist der Barwert einer nachschüssigen Rente R, die n Jahre lang auf ein Konto eingezahlt wird, bei einem gegebenem Kalkulationszins i lautet

$R_0 = R\cdot \frac{q^n-1}{q-1}\cdot\frac{1}{q^n}+K_0$	(nachschüssiger) Rentenbarwert.

Dies ist auch klar, denn der Unterschied zwischen dem Rentenendwert $R_n = R\cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ und dem Rentenbarwert R_0 besteht lediglich in der Abzinsung: $R_0 = -\frac{R_n}{q^n}$

MERKE:

- Der Ausdruck $\frac{q^n-1}{q-1}\cdot\frac{1}{q^n}$ = RBWF(n;i) heißt *nachschüssiger Rentenbarwertfaktor*, der hinten im Buch tabelliert ist in Abhängigkeit von der Laufzeit n und dem Zinssatz i. Das Ausrechnen mit einem Taschenrechner ist aber auch problemlös möglich.
- Er gibt an, wie viel 1 €, der jährlich nachschüssig n Jahre lang auf ein Konto eingezahlt wird, heute, d.h. in t = 0, wert ist.

Beispiel 23:

Fritz zahlt n = 4 Jahre lang 1 € bei i = 10 % Zinsen auf ein Konto ein. Wie viel Euro hat er am Ende der Laufzeit zusammengespart, wie viel ist dieses Geld am Anfang der Laufzeit, also heute, wert?

Man erhält einen Rentenendwert von $K_4 = 1\cdot \frac{1{,}1^4-1}{1{,}1-1}$ = 1·REWF (4;10 %) = 1·4,641 = 4,641 €. Der viermalig eingezahlte Euro ist also nach vier Jahren insgesamt 4,641 € wert. Am Anfang ist er $K_0 = \frac{4{,}641}{1{,}1-1}$ = 1·RBWF (4;10 %) = 1·3,16987 = 3,16987 € wert.

LAMBERT-REGEL:

Ein Investor ist also indifferent zwischen drei unterschiedlichen Alternativen:

- jedes Jahr ein Rente (= Rate, = Annuität) von 1 € zu erhalten
- am Ende der Laufzeit eine Einmal-Zahlung von K_n, also hier 4,641 € ausgezahlt zu bekommen
- am Anfang der Laufzeit einen Barwert von K_0, hier also 3,16987 €, zu erhalten.

Die Formel für den Endwert lässt sich nach der Rentenrate R auflösen:

$R = (K_n - K_0q^n)\cdot \frac{q-1}{q^n-1}$	(nachschüssige) Rente.

Beispiel 24:

Fritz hat ein Startkapital von 500 €, das er drei Jahre lang anlegen möchte. Gleichzeitig will er eine Rate R festverzinslich zu 8 % auf ein Konto einzahlen, um am Ende zusammen mit seinem verzinsten Startkapital 1.000 € zu erhalten.

Wie hoch muss die Rentenrate R hierfür sein?

$R = (1.000 - 500 \cdot 1{,}08^3) \cdot \frac{1{,}08 - 1}{1{,}08^3 - 1} = 114{,}0168$ €.

Der Sparer muss also jedes Jahr 114,0168 € auf das Konto anlegen, wie auch die Probe zeigt:

Zeit	31.12.2000	31.12.2001	31.12.2002	31.12.2003
Entwicklung Startkapital	500	540	583,2	629,86
Entwicklung erste Rate		**114,0168**	123,138	132,989
Entwicklung zweite Rate			**114,0168**	123,138
Einzahlung dritte Rate				**114,0168**
geforderter Endwert				1.000

Tab. 3: Nachschüssige Rente und ihre Verzinsung auf einem Konto

Die anfänglich eingezahlten 500 € verzinsen sich nach einem Jahr zu 540 €, nach zwei Jahren zu 583,2 € und schließlich nach drei Jahren zu 629,86 €. Die erste Rate von 114,0168 wird ebenso verzinst. Sie ist nach einem Jahr, also in $t = 2$, 123,138 € wert, nach einem weiteren Jahr der Verzinsung dann 132,989 €. Ebenso wird die eingezahlte Rente in $t = 2$ verzinst und wächst an auf 123,138 €. Lediglich die letzte, in $t = 3$ eingezahlte Rente wird nicht verzinst, da ihre Zahlung und das Ende der Laufzeit auf denselben Tag fallen (dies ist anders bei der vorschüssigen Rentenrechnung, hier wird die letzte Rente nach ein ganzes Jahr auf dem Konto liegen gelassen).

Ebenso lässt sich die Rentenendwertformel nach der Laufzeit n auflösen:

$$K_n = q^n \cdot K_0 + R \cdot \frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1} \cdot R \quad \Leftrightarrow$$

$n = \dfrac{\ln\left(K_n + \frac{R}{i}\right) - \ln\left(K_0 + \frac{R}{i}\right)}{\ln q}$, Laufzeit bei nachschüssiger Rente mit Startkapital.

Für den Fall, dass kein Startkapital K_0 zur Verfügung steht, vereinfacht sich diese Formel dann wegen $K_0 = 0$ zu

$n = \dfrac{\ln\left(K_n + \frac{R}{i}\right) - \ln\frac{R}{i}}{\ln q} = \dfrac{\ln\left(\frac{R_n \cdot i}{R} + 1\right)}{\ln q}$, Laufzeit bei nachschüssiger Rente ohne Startkapital.

Beispiel 25:

Hans möchte eine Rate von 200 € jedes Jahr auf ein Konto zahlen. Das Geld verzinst sich zu 10 %.

Wie viele Jahre muss er sparen, damit er am Ende 1.500 € ausgezahlt bekommt, wenn er