

1 Einführung: Vektoren

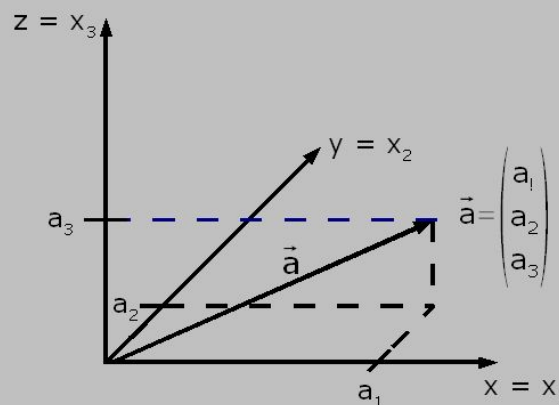
Ein äußerst wichtiger Bestandteil der Algebra sind **Vektoren**. Diese können in unterschiedlichen Dimensionen auftreten zum Beispiel in der Ebene, im dreidimensionalen oder mehrdimensionalen Raum. In diesem Skript werden ausschließlich Vektoren im reellen drei- oder zweidimensionalen Raum betrachtet. Im dreidimensionalen Raum hat ein Vektor drei Komponenten x , y und z . In diesem Skript werden Vektoren bis zur Dimension drei behandelt.

LAMBERT - DARSTELLUNG VEKTOREN:

Ein Vektor ist ein in eine Spalte geschriebenes Zahlentripel, d.h.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } a_1, a_2 \text{ und } a_3 \text{ aus einer Menge stammen, z.B. den reellen Zahlen, d.h.}$$

z.B. $a_1 = 10$, $a_2 = 5$ und $a_3 = -24$.



Folgende Vektoren treten in der Mathematik sehr häufig auf:

- der Ortsvektor $\vec{p} = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ des Punktes $P = (x_1 ; x_2 ; x_3)$.

Dieser Vektor erstreckt sich vom KO – Ursprung bis zum Punkt

$$P = (x_1 ; x_2 ; x_3).$$

- der Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- der Gegenvektor eines Vektors. Der Gegenvektor ist genauso lang wie der ursprüngliche Vektor, allerdings hat er die entgegengesetzte Richtung zum ursprünglichen Vektor. Dies heißt mathematisch formuliert: Der Gegenvektor zum Gegenvektor, wenn man alle vorkommenden Element im Tripel mit (-1)

erweitert.

MERKE:

Möchte man den Punkt P

- in **vektorieller Form** aufschreiben, so notiert man: $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.

- in **Koordinatenschreibweise** aufschreiben, so notiert man $P = (p_1 ; p_2 ; p_3)$. Beide Schreibweisen stellen denselben Punkt dar. Der Unterschied liegt nur in der Darstellung.

Beispiel 1:

Bestimmen Sie den Gegenvektor zu den folgenden Vektoren:

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 1251 \end{pmatrix} \text{ und b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1+a \\ a \\ 154a+b \end{pmatrix}.$$

a) Alle Einträge sind mit (-1) zu multiplizieren, d.h.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 1251 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 1251 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -1251 \end{pmatrix}.$$

b) Auch hier wird wie bei a) vorgegangen, so dass

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1+a \\ a \\ 154a+b \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{b} = -\begin{pmatrix} 1+a \\ a \\ 154a+b \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{b} = \begin{pmatrix} -1-a \\ -a \\ -154a-b \end{pmatrix}.$$

1.1 Elementare Rechenregeln für Vektoren

Die Addition und Subtraktion von Vektoren geschieht komponentenweise.

LAMBERT - KOCHREZEPT ADDITION UND SUBTRAKTION VON VEKTOREN:

Seien \vec{a} und \vec{b} Vektoren. Dann gilt:

1. Addition:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{c} \text{ mit } c_1 = a_1 + b_1, c_2 = a_2 + b_2 \text{ und } c_3 = a_3 + b_3.$$

2. Subtraktion:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \vec{d} \text{ mit } d_1 = a_1 - b_1, d_2 = a_2 - b_2 \text{ und } d_3 = a_3 - b_3.$$

Sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion sind äquivalente Umformungen zulässig, d.h. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$.

Beispiel 2:

Es seien folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Berechnen Sie die Vektoren } \vec{a} + \vec{b} \text{ und } \vec{a} - \vec{b}.$$

Es ist $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-3) \\ 24+1 \\ -5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 25 \\ -4 \end{pmatrix}$. Bei der Bildung der Differenz wird genau

so vorgegangen, d.h. $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 24-1 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Ein Vektor kann mit einer Zahl multipliziert werden. Dadurch wird er vervielfacht.

LAMBERT - KOCHREZEPT VERVIELFACHUNG EINES VEKTORS:

Ein Vektor kann vervielfacht werden, wenn man ihn mit einer (reellen) Zahl k erweitert. Dabei wird jede Komponente des Vektors mit dieser Zahl k erweitert.

Konkret sieht die Rechnung folgendermaßen aus:

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3:

Vervielfachen Sie den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit der Zahl 8.

Also $k \cdot \vec{a} = 8 \cdot \vec{a} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 1 \\ 8 \cdot 24 \\ 8 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 192 \\ -40 \end{pmatrix}$.

Beispiel 4:

Es sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 45 \\ 63 \\ -99 \end{pmatrix}$ gegeben. Die reelle Zahl k soll nun so

bestimmt werden, dass $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Der Ansatz lautet: $\vec{b} = k \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} 45 \\ 63 \\ -99 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot 5 \\ k \cdot 7 \\ k \cdot (-11) \end{pmatrix}$.

Zunächst kann folgendes Gleichungssystem aufgestellt werden:

I $45 = 5k \Rightarrow k = 9$

II $63 = 7k \Rightarrow k = 9$

III $-99 = 11k \Rightarrow k = 9$

Alle drei Gleichungen ergeben den Wert $k = 9$, womit kein Widerspruch vorliegt. Somit gilt für $k = 9$, dass $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

1.2 Mittelpunktbestimmung einer Strecke

Lauten die Ortsvektoren zu den Endpunkten A und B einer Strecke, \vec{a} und \vec{b} so besitzt der Mittelpunkt M der Strecke \overline{AB} den Ortsvektor $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

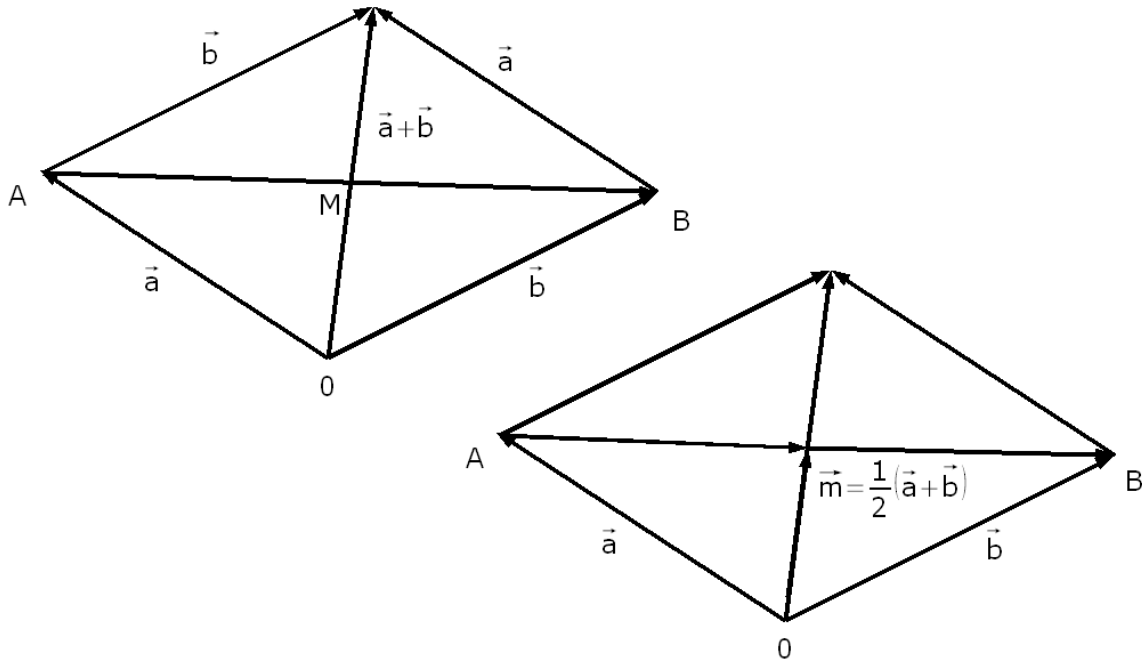


Abb. 1: Mittelpunkt einer Strecke aus vektorieller Sicht

MERKE:

Wird die Strecke in eine beliebige Anzahl n gleich langer Teilstücke zerlegt, so gilt für die Ortsvektoren der Teilpunkte X_1, X_2, \dots, X_{n-1} :

$$\vec{x}_k = \vec{a} + \frac{k}{n} \cdot (\vec{b} - \vec{a}), \text{ für } k=1, 2, \dots, n-1.$$

Beispiel 5:

Die Endpunkte einer Strecke A und B haben die Ortsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Ortsvektor des Streckenmittelpunkts M.

Durch Einsetzen in die Formel für den Ortsvektor ergibt sich:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ -4,5 \end{pmatrix}.$$