

# 1 Lineare Programmierung

Wir behandeln im Folgenden

- Maximierungsprobleme
  - ◇ beste Lösung
  - ◇ zweitbeste Lösung
- Minimierungsprobleme
  - ◇ Zweiphasenmethode
  - ◇ Dualität
  - ◇ dualer Simplex-Algorithmus.

## 1.1 Maximierungsprobleme

Wir erklären die Vorgehensweise am folgenden

### **Beispiel 1.1:**

Das Unternehmen Chaos AG stellt die beiden Produkte 1 und 2 her und vertreibt diese auch. Vom ersten Produkt können höchstens 60 ME abgesetzt werden, vom zweiten maximal 150 ME. Zur Produktion der beiden Güter ist eine Maschine nötig, die eine Kapazität von 70 Minuten besitzt. Für eine Einheit von Produkt 1 wird eine Minute benötigt, für eine Einheit von Produkt 2 hingegen 12 Sekunden. Nach der Bearbeitung auf der Maschine werden beide Produkte noch per Hand nachbearbeitet, und zwar Produkt 1 insgesamt 150 Stunden lang, Produkt 2 allerdings nur 50 Stunden. Die Arbeiter stehen für maximal 12.500 Stunden zur Verfügung. Für Produkt 1 lässt sich ein Stückdeckungsbeitrag von 270 € erzielen, für das zweite Produkt schließlich 45 €.

Wie lautet das deckungsbeitragsmaximale Produktionsprogramm?

### 1.1.1 Beste Lösung

#### 1.1.1.1 Aufstellen des Problems

Zunächst müssen die Informationen aus der Aufgabenstellung in Ungleichungen übersetzt werden. Es bezeichne  $x_1$  die Anzahl der Mengeneinheiten des ersten Produkts, entsprechend  $x_2$  jene des zweiten.

##### LAMBERT-KOCHREZEPT:

**Frage:** Woher weiß man, welche die zu optimierenden Variablen sind? Ist es die Anzahl der Stunden auf der Maschine oder die Arbeitsstunden?

**Antwort:** Man findet sie dadurch, dass man meistens jene Variablen nimmt, die mit monetären Informationen (Deckungsbeitrag, Gewinn, Kosten, Umsätze, etc.) behaftet sind. Diese stehen oftmals im letzten Satz der Aufgabenstellung und bilden die Zielfunktion, hier also die Mengeneinheiten der beiden Produkte.

Wir stellen unterschiedliche Restriktionen fest:

- Absatzrestriktionen,
- Maschinenrestriktionen und
- Zeitrestriktionen.

Die **Absatzrestriktionen** sind leicht aufgestellt:

$$x_1 \leq 60 \text{ und } x_2 \leq 150 \quad (\text{Absatzrestriktionen}).$$

Alsdann kümmern wir uns um die **Maschinenkapazität**: man weiß, dass eine ME des ersten Produkts eine Minute Zeit benötigt, eine ME von 2 hingegen 12 Sekunden, also 0,2 Minuten. Damit ist

- $1x_1$  jene Zeit,
  - ◊ die für die Produktion für das erste Gut auf der Maschine benutzt wird,
- entsprechend  $0,2x_2$ 
  - ◊ jene für das zweite Gut.

Da die Maschine nur insgesamt 70 Minuten einsatzfähig ist, muss die Gesamtzeit, also  $1 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2$ , daher kleiner oder gleich 70 sein:

$$1 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 \leq 70. \quad (\text{Maschinenkapazität}).$$

Die Zeit auf der Maschine muss nicht komplett genutzt werden. Es könnte sich im Laufe der Rechnung als optimal herausstellen, dass man z.B.  $x_1 = 40$  ME von Gut 1 und  $x_2 = 50$  ME von Gut 2 herstellt, mithin lediglich  $1 \cdot 40 + 0,2 \cdot 50 = 40 + 10 = 50$  Minuten der Maschine benötigt werden und daher 20 Minuten ungenutzt verstreichen.

**MERKE:**

Wir kommen im Rahmen der sog. Schlupfvariablen auf diesen Punkt zurück.

Für die geleisteten **Arbeitsstunden** gilt ähnliches: 150 Stunden pro ME von Gut 1 bei  $x_1$  ME also  $150 \cdot x_1$  Arbeitsstunden, 50 Stunden pro ME 2 entsprechend  $50 \cdot x_2$  Arbeitsstunden für alle Einheiten von 2, also für  $x_2$  ME viele. Wegen der Begrenzung der Zeit auf 12.500 gilt

$$150 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 \leq 12.500 \quad (\text{Zeitrestriktion}).$$

Daher:

**MERKE:**

Die Vorfaktoren der Variablen  $x_1$  und  $x_2$  in den Restriktionen nennt man **Prozesskoeffizienten**.

Wichtig (und leider oftmals vergessen) sind die sogenannten **Nichtnegativitätsbedingungen**, da keine negative Anzahl von Produkten hergestellt werden kann. Es gilt also

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{Nichtnegativitätsbedingungen}).$$

Man erhält also insgesamt sechs Restriktionen.

Unter Beachtung dieser Beschränkungen soll nun die sogenannte **Zielfunktion** optimiert werden. Zur Bildung derselben schauen wir uns die monetären Informationen aus der Aufgabenstellung an. Wenn man  $x_1$  ME von Produkt 1 und pro Stück vom ersten Gut 270 € erzielt werden, dann erhält man für die Menge insgesamt  $270 \cdot x_1$  €. Für das zweite Produkt analog  $45 \cdot x_2$  €. Da der Gewinn zu maximieren ist, gilt

$$G = 270 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 \rightarrow \max! \quad (\text{Zielfunktion}).$$

Daher:

**MERKE:**

Es ist von großer Bedeutung für die Rechnung, ob die Zielfunktion maximiert oder minimiert werden soll. Wir betrachten im folgenden zunächst nur ein **Maximierungsproblem**.

Insgesamt gilt also

$$G = 270 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 \rightarrow \max! \quad (\text{Zielfunktion})$$

unter den Nebenbedingungen

- |     |                              |                                |
|-----|------------------------------|--------------------------------|
| (1) | $x_1 \leq 60,$               | (Absatzrestriktion)            |
| (2) | $x_2 \leq 150,$              | (Absatzrestriktion)            |
| (3) | $x_1 + 0,2x_2 \leq 70,$      | (Maschinenrestriktion)         |
| (4) | $150x_1 + 50x_2 \leq 12.500$ | (Zeitrestriktion),             |
|     | $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$    | (Nichtnegativitätsbedingungen) |

Dieses Problem kann nun

- graphisch und/oder
- rechnerisch

gelöst werden (ab einer Anzahl von drei Variablen in der Zielfunktion hingegen nur noch rechnerisch).

### 1.1.1.2 Graphische Lösung

Für die graphische Lösung schreiben wir die Variablen der Zielfunktion an die Achsen. Die **Ungleichungen (1) und (2)** trägt man leicht ins Koordinatensystem ein, nämlich als Vertikale  $x_1 = 60$  und als Horizontale  $x_2 = 150$ , s. Abb. 1. Für die anderen empfiehlt sich folgender

**LAMBERT-TRICK:**

Wo treffen die Geraden auf die Achsen?

Hierzu ersetzt man „ $\leq$ “ durch „ $=$ “, setzt genau eine der Variablen  $x_1$  oder  $x_2$  null und schaut, wie groß die jeweils andere sein muss, um die Gleichheit zu gewährleisten.

### Ungleichung (3)

Wenn also  $x_1 = 0$  ist, muss  $x_2 = 350$  sein, damit genau gleich 70 resultiert. Genau so folgt aus  $x_2 = 0$  entsprechend  $x_1 = 70$ . Die Gerade, die die Restriktion (3) repräsentiert, trifft also bei  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 350$  und  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 70$  die Achsen. Anders ausgedrückt: sie trifft bei  $x_1 = 70$  die Abszisse und bei  $x_2 = 350$  die Ordinate.

Wenn also nichts von Produkt 1 hergestellt wird ( $x_1 = 0$ ), können  $x_2 = 350$  ME von 2 auf der Maschine erstellt werden, entsprechend  $x_1 = 70$  ME von 1, wenn nichts von 2 erstellt wird.

### Ungleichung (4)

Für die vierte Restriktion erhält man mit der o.e. Methode  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 250$  und  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 83,33$ .

Der Vorteil dieser Überlegung ist, dass man abschätzen kann, wie viele Einheiten auf den Achsen eingezeichnet werden müssen, damit das Bild nicht zu groß und nicht zu klein wird.

Natürlich existieren auch andere Methoden, um die Geraden zu erhalten.

So kann z.B. die Gleichung  $1 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 = 70$  nach  $x_2$  aufgelöst werden ( $x_2 = 350 - 5x_1$ ), hiernach setzt man Zahlen für  $x_1$  ein und erhält Punkte der Geraden.

Oder man sieht, dass 350 der Ordinatenabschnitt ist und  $-5$  die Steigung und konstruiert hiermit die Gerade.

Also erhält man die Abb. 1 für den zulässigen Bereich

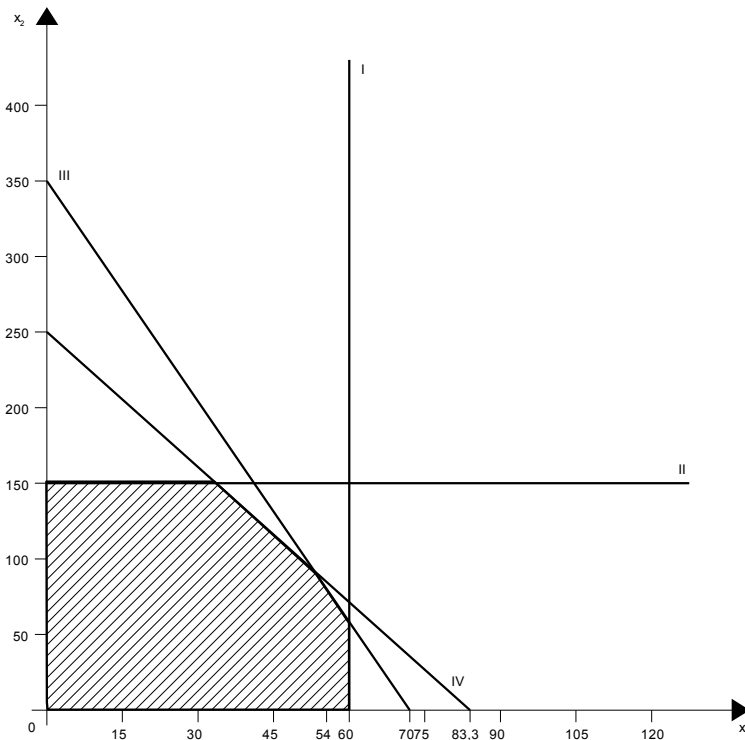


Abb. 1: Zulässiger Bereich

Nun kann man den Bereich schraffieren, denn die Linien geben lediglich die Gleichheit an, nicht den Fall „ $\leq$ “ oder „ $\geq$ “. Für eine „ $\leq$ “-Restriktion wird der Bereich links von der Gerade schraffiert, für eine „ $\geq$ “-Restriktion entsprechend der Bereich rechts hiervon.

Man beachte, dass die Nichtnegativitätsbedingungen dadurch eingehen, dass sich der zulässige Bereich rechts von der Ordinate und oberhalb der Abszisse befindet. Der zulässige Bereich ist hier ein Hektagon, da aus sechs Ecken bestehend. Entsprechend kann man auch ein Pentagon (aus fünf Ecken), ein Heptagon (aus sieben Ecken) etc. erhalten. Allgemein nennt man den zulässigen Bereich ein Polyeder (= Vieleck = Simplex).

Viele Autoren nennen diesen Simplex den Bereich der *zulässigen Lösungen* und grenzen ihn ab von der oder den *optimalen Lösungen*, die in einer der Ecken oder auf einer Randlinie des Simplex liegen.